(1) $\sin 2x=\cos x \iff 2\sin x\cos x-\cos x=0 \iff \cos x(2\sin x-1)=0$

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ より　$\cos x\neq 0$ なので　$\sin x=\dfrac{1}{2}$　　$\therefore\ \underline{\boldsymbol{x=\dfrac{\pi}{6}}}$

(2) $\cos 3x=\cos(x+2x)=\cos x\cos 2x-\sin x\sin 2x$

$=\cos x(2\cos^2 x-1)-2\sin^2 x\cos x$

$=2\cos^3 x-\cos x-2\cos x(1-\cos^2 x)$

$=2\cos^3 x-\cos x-2\cos x+2\cos^3 x$

$=\ \underline{\boldsymbol{4\cos^3 x-3\cos x}}$

(3) $\cos 3x-a\sin 2x+b\cos x=0$ について，(2) より

$(4\cos^3 x-3\cos x)-2a\sin x\cos x+b\cos x=0 \iff \cos x(4\cos^2 x-3-2a\sin x+b)=0$

$\cos x\neq 0$ より　$4\cos^2 x-3-2a\sin x+b=0$

$4(1-\sin^2 x)-3-2a\sin x+b=0$　　$\therefore\ 4\sin^2 x+2a\sin x-b-1=0$

$\sin x=t$ とおいて，　$4t^2+2at-b-1=0$ …①　$(0<t<1$ …②$)$

について考える．

方程式①が②の範囲で実数解を 2 つもてばよい．　…③

$f(t)=4t^2+2at-b-1$ とおき，　$f(t)=4\left(t+\dfrac{a}{4}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}-b-1$

③を満たすためには

$$f(0)=-b-1>0 \text{ かつ } f(1)=2a-b+3>0 \text{ かつ } 0<-\frac{a}{4}<1 \text{ かつ } -\frac{a^2}{4}-b-1<0$$

をみたせばよく,

$$\begin{cases} b<-1 \\ -4<a<0 \\ b>-\dfrac{a^2}{4}-1 \\ b<2a+3 \end{cases}$$

よって, これらすべてを満たす領域を ab 平面上に書き表すと, 以下の図の斜線部分.
ただし境界線上の点は含まれない.